4° Diss. 3833 (6

Erklärung

der

isochromatischen Kurven,

welche

einaxige parallel mit der Axe geschnittene Kristalle in homogenem polarisirtem Lichte zeigen.

Von

Dr. Johann Müller.

Darmstadt,
gedruckt bei Carl Wilhelm Leske.

1833.

Digitized by Google

Einleitung.

Es ist das Ziel alles physikalischen Strebens über den wahren innern Zusammenhang der Naturerscheinungen haltbare Hypothesen aufzustellen, welche man gewöhnlich mit dem Namen der Naturgesetze bezeichnet. Sind wir geleitet durch die Erfahrung, zur Aufstellung solcher Gesetze gelangt, so haben wir dadurch einen Standpunkt gewonnen, von welchem aus sich die Natur wenigstens theilweise a priori konstruiren lässt. Wenn nun eine auf diese Weise konstruirte Natur mit unsrer bisherigen Erfahrung vollkommen übereinstimmt; wenn sie uns ferner Erscheinungen ankündigt, die bisher unsern Beobachtungen entgangen waren, und welche wir durch besonders angestellte Experimente bestätigt finden, dann kann offenbar die Hypothese von welcher man ausging, eine sehr nahe an Gewissheit grenzende Wahrscheinlichkeit erlangen. Dieser Punkt ist in der Mechanik erreicht, und wird in der Optik durch die Vibrationstheorie wohl bald erreicht werden. Durch das Gesetz der allgemeinen Schwere hat die Mechanik ihre physikalische Vollendung erhalten: so weit wir mechanische Bewegungen gewahren, vom

Digitized by Google

freien Fall auf der Erde bis zu der Bewegung der Himmelskörper, überall finden wir dieses Gesetz um so mehr bestätigt, je genauer wir beobachten.

Nach der Mechanik ist, wie schon so eben angedeutet wurde, die Lehre vom Licht der ausgebildetste Theil der Physik. Zwar ist man noch nicht ganz einig darüber, ob die Vibrationstheorie oder die Emissionstheorie von den richtigen Hypothesen ausgehe; für die eine Ansicht sowohl, als für die andre haben sich grosse Gelehrte entschieden; in der neusten Zeit jedoch scheint die Vibrationstheorie besonders dadurch ein entschiednes Uebergewicht erlangt zu haben, dass die Erklärung der Interferenz- und Beugungsphenomene nach der Emanationstheorie zu unüberwindlichen Hindernissen führt. Die Vibrationstheorie, welche bekanntlich dem leider nur zu früh verstorbenen Physiker Fresnel die Ausbildung verdankt, in welcher wir sie jetzt besitzen, zeichnet sich besonders dadurch aus, dass sich die ganze Optik aus dem richtig aufgefassten und angewandten Begriff der Aetherschwingungen, gleichsam von innen heraus konstruiren lässt, während man nach der Emissionstheorie, abgesehn davon, dass sich manche Erscheinungen gar nicht mit ihr in Uebereinstimmung bringen lassen, die Erklärung der Lichtphenomene noch nicht auf ein so einheitliches Prinzip hat zurückführen können. Die Interferenz- und Beugungsphenomene, die Erscheinungen der Polarisation und der doppelten Brechung, ergeben sich als nothwendige Folgen aus den ersten Prinzipien der Vibrationstheorie. Nicht so verhält es sich mit der Emanationstheorie: nach ihr muss man sich die Lichtmoleküle

Digitized by Google

mit einer Menge unter sich keineswegs in Verbindung stehender Eigenschaften begabt denken, die ihnen nach und nach beigelegt wurden, je nachdem es Bedürfniss für die Erklärung neu entdeckter Erscheinungen war. Lässt sich nicht von der Erklärung der newtonschen Farbenringe durch die sogenannten Anwandlungen, und von der Erklärung der Ring- und Farbenerscheinungen, welche kristallisirte Blättchen in polarisirten Lichte zeigen, durch die sogenannte bewegliche Polarisation, kühn sagen, dass sie nur ein in die Sprache der Emissionstheorie übersetzter Ausdruck für die Gesetze des äussern Zusammenhangs der Erscheinungen sind?

Die Grundsätze der Vibrationstheorie sind in dem Folgenden als bekannt vorausgesetzt; um sie gründlich kennen zu lernen ist nichts mehr zu empfehlen als Fresnels Schriften über diesen Gegenstand zu studiren; die entsprechenden Stellen aus seinen Schriften sollen jedesmal citirt werden, so oft von einem seiner Sätze Gebrauch gemacht wird. Der englische Physiker Airy hat, gestützt auf eben diese Grundsätze die Erscheinungen, welche einaxige senkrecht auf die Axe geschnittene Kristalle im polarisirten Lichte zeigen, berechnet, und auch die Erscheinung erklärt, welche dadurch hervorgebracht wird, dass man ein sogenanntes fresnelsches Glasparallelopiped mit einem solchen Kristalle verbindet*). Auch die

*) Bringt man zwischen zwei gekreuzte Turmalinplatten einen einaxigen senkrecht auf die Axe geschnittenen Kristall, und ein fresnelsches Glas parallelopiped dessen Reflexionsebne einen Winkel von 45° mit den Polarisationsebnen der Turmaline macht, (es ist einerlei ob vor oder hinter dem Kristall) so wird man die Erscheinung

Digitized by Google

eigenthümlichen Erscheinungen der sogenannten Circularpolarisation in Quarzplatten hat er mit Hülfe einiger von ihm selbst aufgestellte Hypothesen über Cirkularvibrationen im Quarz berechnet und seine Resultate zeigen eine überraschende Uebereinstimmung mit der Erfahrung.

In dem Folgenden will ich nun versuchen nach Fresnels Prinzipien die Kurven zu berechnen, welche man in einaxigen parallel mit der Axe geschnittenen Kristallen beobachtet, wenn man sie zwischen zwei Turmalinplatten bringt, und nach einem homogenen Lichte sieht.

---

sehn, welche Airy in seiner Abhandlung (übersetzt in Poggendorfs Annalen 1831, Nro. 10. pag. 211 u. 226) beschrieben und erklärt hat. Es ist zu verwundern, dass er nicht seine Rechnungen auch auf den Fall ausgedehnt hat, dass zwei solcher Parallelopipede mit dem Kristall kombinirt werden. Bringt man nemlich vor und hinter den Kristall ein solches Parallelopiped in die eben erwähnte Lage so sieht man sehr schöne vollkommen ununterbrochene runde Ringe, und in der Mitte nach Umständen einen hellen oder dunklen Fleck. Ich habe diesen Fall berechnet und ebenfalls ein vollkommen genügendes Resultat gefunden.

Digitized by Google

Entwickelung eines allgemeinen Ausdrucks für die Intensität eines Lichtstrals, welcher durch zwei Turmalinplatten, und eine dazwischen liegende Platte eines doppelt brechenden Kristalls gegangen ist.

Trifft ein polarisirter Stral, dessen Richtung in c Fig. 1., und dessen Schwingungsebne in acb projizirt sein mag, eine doppelt brechende Kristallplatte, so theilt er sich in zwei ebenfalls polarisirte Stralen, deren Schwingungsebnen, die in gcd und ecf projicirt sein mögen, einen rechten Winkel mit einander machen. Nehmen wir nun an, dass der Hauptschnitt des Kristalls für den einfallenden Stral in gcd projizirt sei, so ist derjenige der beiden Stralen, dessen Schwingungsebne ecf ist der ordinäre, der andre hingegen der extraordinäre Stral*). (Fresnel Mémoire sur la double réfraction. Mémoires de l'institut, Academie des sciences, Tom. VII. pag. 167, 157. Annales de chimie et de physique, Tom. XVII. p. 103.)

Ist J die absolute Geschwindigkeit der Vibrationen des ursprünglichen Strals, d. h. die Geschwindigkeit mit welcher ein schwingendes Aethermolekül des einfallenden Strals durch die Lage des Gleichgewichts geht, so ist J cos. v die absolute Geschwindigkeit der Vibrationen im extraordinären, J sin. v die absolute Geschwindigkeit derselben

*) Bekanntlich macht die Schwingungsebne eines polarisirten Strals mit seiner Polarisationsebne einen rechten Winkel.

Digitized by Google

im ordinären Stral, wenn v den Winkel g c b bezeichnet, welchen der Hauptschnitt mit der Schwingungsebne des einfallenden Strals macht. (Mém. sur la double refraction, pag. 65.)

Es sei Fig. 2. A B C D der Durchschnitt der Kristallplatte mit der Einfallsebne des Strals a b, der sich durch die doppelte Brechung in die Stralen b c und b d theilt*), so werden diese nach c e und d f, parallel mit a b austreten, vorausgesetzt, dass die Austrittsfläche C D parallel mit der Eintrittsfläche A B ist. Lassen wir nun aber umgekehrt zwei parallele in einer Ebne schwingende Stralen in eben diesen Richtungen e c und f d an der Fläche C D eintreten, so ist klar dass jeder in zwei Stralen gebrochen wird, und zwar so dass in b ein ordinärer und ein extraordinärer Stral zusammentreffen, welche ursprünglich verschiednen Stralen angehörten, nun aber nach einer und derselben Richtung b a austreten. Die beiden in b zusammentreffenden Strahlen haben aber im Kristall verschiedne Wege zurückgelegt, und die Wellenlängen sind auf beiden Wegen ungleich, folglich liegen zwischen dem gemeinschaftlichen Ursprung beider Stralen und dem Punkte b auf dem Wege des ordinären Strals eine bestimmte Anzahl (ϑ) Wellenlängen mehr oder weniger als auf dem Wege des extraordinären.

Bezeichnen wir (Mémoire sur la dispersion de la lumiere. Mém. de l'institut, Academie des sciences, Tom. V.) durch

$$J \cos. v \sin. 2\pi g$$

die Geschwindigkeit mit welcher ein in b gelegenes Aethermolekül zu einer bestimmten Zeit durch den extraordinären Stral affizirt wird, so ist

$$J \sin. v \sin. 2\pi (g \pm \vartheta)$$

die Geschwindigkeit welche ihm gleichzeitig der ordinäre Stral mittheilt.

---

*) Im allgemeinen liegt nur der ordinäre Stral mit dem Einfallslothe und dem einfallenden Stral in einer Ebne.

Digitized by Google

Obgleich nun diese Stralen von b an nach derselben Richtung b a gehn, so können sie doch nicht interferiren, weil ihre Schwingungsebnen einen rechten Winkel mit einander machen. (Mém. sur la double refraction.)

Zerlegen wir aber die Vibrationen der austretenden Stralen durch eine Turmalinplatte, deren Schwingungsebne i c h Fig. 1. sein mag, welche einen Winkel v' mit dem Hauptschnitt des Kristalls macht, so können nun die beiden Stralen interferiren. Wenn die Geschwindigkeit welche der extraordinäre Stral einem in der Richtung b a liegenden Molekül zu irgend einer Zeit mittheilt, reduzirt auf die Schwingungsebne des zweiten Turmalins

$$J \cos. v \cos. v' \sin. 2\pi g$$

ist, so ist die durch den ordinären Stral in derselben Ebne dem Molekül gleichzeitig mitgetheilte Geschwindigkeit

$$J \sin. v \sin. v' \sin. 2\pi (g \pm \vartheta).$$

Die Geschwindigkeit mit welcher das Molekül nun wirklich affizirt sein wird ist demnach

$$J\left\{\cos. v \cos. v' \sin. 2\pi g + \sin. v \sin. v' \sin 2\pi (g \pm \vartheta)\right\} \ldots\ldots\ldots 1)$$

wenn die Schwingungsebne des zweiten Turmalins innerhalb des Winkels g c e fällt, hingegen

$$J\left\{\cos. v \cos. v' \sin. 2\pi g - \sin. v \sin. v' \sin. 2\pi (g \pm \vartheta)\right\}$$

oder, was dasselbe ist

$$J\left\{\cos. v \cos. v' \sin. 2\pi g + \sin. v \sin. v' \sin. 2\pi (g + \vartheta + {}^1/_2)\right\} \ldots\ldots 2)$$

wenn sie innerhalb des Winkels g c f fällt. Es ist zu bemerken dass man in 1) nur für ϑ, $\vartheta + {}^1/_2$ zu setzen braucht um 2) zu erhalten. (Mém. sur la double refraction.)

Der Ausdruck bei 1) lässt sich verwandlen in

$$J\left\{(\cos. v \cos. v' + \sin. v \sin. v' \cos. 2\pi \vartheta) \sin. 2\pi g + \sin. v \sin. v' \sin. 2\pi \vartheta \cos. 2\pi g\right\}$$

Digitized by Google

woraus sich für die Intensität S des resultirenden Strals ergibt (Airy's Abhandlung, pag. 221.)

$$S = J^2 \left| (\cos. v \cos. v' + \sin. v \sin. v' \cos. 2\pi\vartheta)^2 + \sin. v^2 \sin. v'^2 \sin. 2\pi\vartheta^2 \right|$$

oder

$$S = J^2 \left| \cos. (v - v')^2 - {}^1/_2 \sin. 2v \sin. 2v' (1 + \cos. 2\pi\vartheta) \right| \quad \ldots\ldots 3)$$

Diese Formel gibt uns allgemein die Intensität eines jeden Lichtstrals, welcher durch zwei Turmaline und eine zwischen beiden liegende doppelt brechende Kristallplatte gegangen ist, wenn wir nur v, v' und ϑ gehörig bestimmen. v und v' sind immer unmittelbar gegeben, ϑ aber hängt von der Natur des doppelt brechenden Kristalls, von der Richtung seiner Oberflächen gegen die Axen der doppelten Brechung und von der Richtung des einfallenden Strals ab, und erst wenn diess alles bestimmt ist, kann man ϑ berechnen. Wir wollen jetzt zur Bestimmung von ϑ für den Fall übergehn, dass der zu betrachtende Kristall nur eine optische Axe hat, und dass er parallel mit dieser Axe geschnitten ist.

Berechnung von ϑ für einaxige parallel mit der Axe geschnittene Kristalle.

Das Umdrehungsellipsoid, dessen Gleichung ist

$$A^2x^2 + B^2y^2 + A^2z^2 = A^2B^2 \quad \ldots\ldots 4)$$

stellt nach Fresnels Theorie die Wellenoberfläche des extraordinären Strals in einem einaxigen Kristall dar, dessen optische Axe mit der Axe der y zusammenfällt. (Mémoire sur la double refraction, pag. 139.) Vermittelst dieser Wellenoberfläche lässt sich nun nach der bekannten

Digitized by Google

schon von Huygens angegebnen Konstruction die Richtung des extraordinären Strals nach der Brechung bestimmen, wenn die Neigung der brechenden Oberfläche gegen die optische Axe und die Richtung des einfallenden Strals bekannt ist. Die Gleichung der mit der Axe parallelen Oberfläche sei

$$z = o.$$

Wenn die Linie, in welcher der einfallende Stral auf den Kristall trifft einen Winkel i mit der Axe der z, und ihre Projektion auf der Ebne der x y einen Winkel α mit der Axe der x macht, so sind ihre Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} y &= \text{tang. } \alpha \,.\, x \\ z &= \frac{\text{cotang. } i}{\cos. \alpha} \,.\, x \end{aligned}\right\}$$

Um nun die Richtung des Strals nach der Brechung zu konstruiren muss man mit der Richtung des Strals, welche durch a b Fig. 3. dargestellt werden mag, während A B den Durchschnitt der Ebne der x y mit der Ebne der Figur bezeichnet, eine andre c d parallel ziehn, und zwar so, dass wenn man von b ein Perpendikel auf sie fällt, der Fusspunkt e desselben um die Länge einer Welle in der Luft von d entfernt ist. Setzen wir die Wellenlänge gleich 1 so ist $ed = 1$, $bd = \frac{1}{\sin. i}$. Durch den Punkt d nun hat man eine Linie so zu legen, dass sie in der Ebne der x y liegt, und senkrecht auf c d steht. Man findet leicht dass die Gleichungen dieser Linie

$$\left.\begin{aligned} z &= o \\ y + \text{cotang. } \alpha \,.\, x &= \frac{1}{\sin. \alpha \,.\, \sin. i} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 5)$$

sind. Legt man nun durch diese Linie eine Berührungsebne an das Ellipsoid, so gibt bekanntlich (Mém. sur la double refraction, pag. 140.) der von dem Mittelpunkt desselben nach dem Berührungspunkt gezogne

Digitized by Google

radius vector die Richtung des gebrochnen Strals an, die Länge desselben aber die Wellenlänge eines in dieser Richtung durch den Kristall gehenden Strals.

Die Gleichungen einer durch den Punkt $z=o, x=o, y=\frac{1}{\sin. i \sin. \alpha}$ der Linie bei 5) gehenden Ebne ist

$$z+\gamma x+\beta(y-\frac{1}{\sin. i \sin. \alpha})=o \quad \ldots \quad 6)$$

Soll diese Ebne das Ellipsoid berühren, so muss der erste Differentialquotient von z in Beziehung auf x aus 4) gleich dem entsprechenden Differentialquotienten aus 6) sein. Dasselbe muss auch für die in Beziehung auf y genommenen Differentialquotienten von z stattfinden. Gleichung 4) gibt

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{x}{z}, \quad \frac{dz}{dy}=-\frac{B^2 y}{A^2 x}$$

Gleichung 6) gibt

$$\frac{dz}{dx}=-\gamma, \quad \frac{dz}{dy}=-\beta$$

es muss also nach obiger Bedingung

$$\gamma=\frac{x}{z}$$

$$\beta=\frac{B^2 y}{A^2 z}$$

sein. Substituirt man nun diese Werthe in 6), multiplizirt alsdann die ganze Gleichung mit $A^2 z$ und zieht die Gleichung 4) von ihr ab, so bleibt

$$\frac{y}{\sin. \alpha \sin. i}=A^2$$

oder

$$y=A^2 \sin. i \sin \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7)$$

Diess ist die Gleichung einer Ebne, welche die Berührungspunkte des Ellipsoids mit sämmtlichen durch den erwähnten Punkt an dasselbe

Digitized by Google

gelegten Berührungsebnen enthält. Die Gleichung einer Ebne, welche auf dieselbe Weise dem Punkte $z=o$, $y=o$, $x=\frac{1}{\sin. i \cos. \alpha}$ der Linie bei 5) entspricht, ist

$$x = B^2 \sin. i \sin \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 8)$$

Eine durch die Linie bei 5) an das Ellipsoid gelegte Berührungsebne muss aber das Ellipsoid in einem Punkte berühren, welcher den Ebnen 7) und 8) gemeinschaftlich ist; durch Kombination der Gleichungen 4), 7) und 8) müssen sich also die Koordinaten des Berührungspunktes bestimmen lassen. Die Gleichungen 7) und 8) geben unmittelbar die Werthe von x und y; substituirt man sie in 4) und bringt z auf eine Seite, so kommt

$$z^2 = B^2 \left\{1 - \sin. i^2 (B^2 \cos. \alpha^2 + A^2 \sin. \alpha^2)\right\}$$

Es lässt sich nun leicht die Länge λ des erwähnten radius vector bestimmen, es ist nemlich

$$\lambda^2 = x^2 + y^2 + z^2 = B^2 + A^2 \sin. i^2 \sin. \alpha^2 (A^2 - B^2) \quad \ldots. 9)$$

Die Gleichungen der Linie mit welcher dieser radius vector zusammenfällt sind

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{\sqrt{1 - \sin. i^2 (B^2 \cos. \alpha^2 + A^2 \sin. \alpha^2)}}{B \sin. i \cos \alpha} x. \\ y &= \frac{A^2 \tang \alpha}{B^2} x \end{aligned}\right\}$$

Ist der Kristall mit parallelen Ebnen begrenzt, so ist die Gleichung der Austrittsfläche

$$z = T$$

wenn T die Dicke der Kristallplatte bezeichnet. Diese Ebne wird von dem in Rede stehenden Stral in einem Punkte getroffen, dessen Koordinaten sind

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} z &= T \\ x &= \frac{T B^2 \sin.i \cos.\alpha}{B\sqrt{\left\{1-(A^2\sin.\alpha^2+B^2\cos.\alpha^2)\sin i^2\right\}}} \\ y &= \frac{T A^2 \sin.i \sin.\alpha}{B\sqrt{\left\{1-(A^2\sin.\alpha^2+B^2\cos.\alpha^2)\sin.i^2\right\}}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots 10)$$

Das Quadrat der Entfernung D des Eintrittspunktes vom Austrittspunkt erhält man, wenn man die Werthe von x, y und z bei 10) quadrirt und addirt, und aus der Summe die Wurzel zieht. Dividirt man den gefundnen Werth von D durch den aus 9) gezognen Werth von λ, so erhält man die Anzahl der Wellenlängen, welche auf dem Wege des extraordinären Strals innerhalb des Kristalls liegen; man erhält

$$\frac{D}{\lambda} = \frac{T}{B\sqrt{\left\{1-(A^2\sin.\alpha^2+B^2\cos.\alpha^2)\sin.i^2\right\}}} \quad \ldots 11)$$

Die Koordinaten des Punktes in welchem der zu dem bisher betrachteten Stral gehörige ordinäre die Austrittsfläche trifft, erhält man, wenn man in 10) A = B setzt; es kommt alsdann

$$\left.\begin{aligned} z &= T \\ x &= \frac{A T \sin.i \cos.\alpha}{\sqrt{\left\{1-A^2\sin.i^2\right\}}} \\ y &= \frac{A T \sin.i \sin.\alpha}{\sqrt{\left\{1-A^2\sin.i^2\right\}}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 12)$$

Setzen wir auch in 11) B = A, so erhält man die Anzahl der Wellenlängen, welche auf dem Wege des ordinären Strals innerhalb des Kristalls liegen, sie ist

$$\frac{D'}{\lambda'} = \frac{T}{\sqrt{\left\{1-A^2\sin.i^2\right\}}} \quad \ldots\ldots 13)$$

Digitized by Google

Ist der Kristall von dem es sich handelt negativ, so ist bc Fig. 2 der ordinäre bd der extraordinäre Stral, mithin bezeichnet 11) die Anzahl der Wellenlängen, welche zwischen b und d, 13) die Anzahl der Wellenlängen, welche zwischen b und c liegen; bei positiven Kristallen ist es gerade umgekehrt, indem bei diesen bc der extraordinären, bd aber der ordinäre Stral ist; wir wollen vor der Hand annehmen dass wir mit einem negativen Kristall zu thun haben, dass also $A > B$.

Es ist klar, dass wenn fd und ec Fig. 2 die beiden parallel in den Kristall eintretenden Stralen sind, von denen oben gesprochen wurde, zwei Aethermoleküle, welche sich in solchen Punkten dieser Stralen befinden, welche man durch eine senkrecht auf beiden Stralen stehende Linie sich verbunden denken kann, wie z. B. d und g sich immer in gleichen Schwingungszuständen befinden. Von den Punkten d und g an laufen die Stralen db und gcb nicht mehr parallel und haben auf ihren Wegen auch nicht mehr gleiche Wellenlängen. Die Grösse ϑ aber findet man nun leicht, wenn man die Anzahl der Wellenlängen welche zwischen b und d liegen von der auf dem Wege gcd liegenden abzieht.

Da nun die Anzahl der Wellenlängen zwischen b und d, und zwischen c und b bekannt ist, so fehlt zur Bestimmung von ϑ weiter nichts mehr als die zwischen g und c liegende Anzahl von Wellenlängen, die wir jetzt bestimmen wollen.

Legt man durch d eine Ebne welche senkrecht auf dem einfallenden Stral steht, so trifft diese den Stral ec im Punkte g, dessen Koordinaten sich leicht ermitteln lassen; sind diese bekannt, so kann man vermittelst ihrer die Entfernung P der Punkte c und g von einander bestimmen, da ja auch die Koordinaten des Punktes c bekannt sind, man findet

$$P = T \sin.i^2 \left\{ \frac{A}{\sqrt{\left|1 - A^2 \sin.i^2\right|}} - \frac{A^2 \sin.\alpha^2 + B^2 \cos.\alpha^2}{B\sqrt{\left|1 - (A^2 \sin\alpha^2 + B^2 \cos.\alpha^2) \sin.i^2\right|}} \right\}$$

Digitized by Google

welches auch der zwischen c und g liegenden Anzahl von Wellenlängen gleich ist, da wir die Wellenlänge für die Luft gleich 1 gesetzt haben und demnach ist

$$\vartheta = P + \frac{D'}{\lambda'} - \frac{D}{\lambda} = T \left\{ \frac{A-B}{AB} + \frac{3 \sin. i^2}{2B} (AB - A^2 \sin. \alpha^2 + B^2 \cos. \alpha^2) \right\}$$

wenn man nemlich den Ausdruck von ϑ nach Potenzen von sin. i entwickelt und bei der zweiten stehn bleibt. Dieser Werth lässt sich auch so ausdrücken

$$\vartheta = T \left\{ \frac{A-B}{AB} - \frac{3 \sin. i}{2B} (A-B)[B-(A+B)\sin. \alpha^2] \right\} \quad \ldots \; 14)$$

Für positive Kristalle, für welche $B > A$ ändert dieser Werth das Zeichen, ausserdem bleibt er unverändert.

Konstruktion der isochromatischen Kurven.

In dem Falle welchen wir bisher betrachtet haben liegt die Axe des Kristalls parallel mit den beiden Flächen durch welche die zu untersuchenden Stralen ein und austreten, daraus folgt aber, dass, welche auch die Richtung des einfallenden Strals sein mag, die Richtung des Hauptschnitts immer parallel mit g c d Fig. 1 bleibt, dass also in unserm Fall v und v′ konstante Grössen sind.

Setzen wir $v = v' = 0$, oder $v = v' = 90^0$ so gibt die Formel bei 3)

$$S = J^2$$

was auch ϑ für einen Werth haben mag, d. h. wenn die Schwingungsebnen der beiden Turmaline parallel sind, und die Axe des Kristalls parallel mit denselben liegt oder senkrecht auf ihnen steht, so ist die Intensität aller durchgehenden Stralen gleich der Intensität der

Digitized by Google

einfallenden (wenn man freilich den Verlust an Intensität durch die Färbung der Turmaline und die theilweise Reflexion an den Ein- und Austrittsflächen nicht in Anschlag bringt).

Ist aber $v=0$ und $v'=90°$, oder $v=90°$ und $v'=0$ so erhalten wir aus 3)

$$S=0$$

d. h. wenn die Schwingungsebnen der Turmaline gekreuzt sind, und die optische Axe des Kristalls mit einer derselben parallel ist, so geht gar kein Licht durch.

Lassen wir nun $v=v'=45^2$ sein, so gibt uns 3)

$$S=J^2\left\{1-{}^1/_2(1+\cos.2\pi\vartheta)\right\}$$

oder

$$S=\frac{J^2}{2}\left\{1-\cos.2\pi\vartheta\right\} \ldots\ldots\ldots 15).'$$

Hier sieht man nun leicht ein dass wenn ϑ ein vielfaches von 1 ist, $S=0$, hingegen wenn ϑ ein ungerades vielfaches von $^1/_2$ ist $S=J^2$ sein wird; für alle zwischenliegende Werthe von ϑ bekommt man auch Werthe, welche zwischen J^2 und 0 fallen. Da aber nun bei ein und demselben Werthe von T, also bei einer und derselben Kristallplatte, der Werth von ϑ sich durch Verändrung von i und α ändert, welche die Richtung der aus dem Kristall ins Auge kommenden Stralen bestimmen, so sind offenbar die Stralen, welche von verschiednen Stellen des Kristalls in's Auge kommen auch verschieden intensiv.

Wir wollen jetzt den Zusammenhang welcher zwischen den gleichhellen (isochromatischen) Stellen statt findet näher betrachten, d. h. die Form der isochromatischen Kurven bestimmen.

Denken wir uns von dem betrachtenden Auge ein Perpendikel auf die Oberfläche des Kristalls gefällt, und durch den Fusspunkt c Fig. 4 desselben eine Linie d e rechtwinklig auf die Axe p q des Kristalls gezogen, (diese Linie fällt mit derjenigen zusammen, welche wir eben

Digitized by Google

bei der Berechnung von ϑ für die Axe der x nahmen) so kann man sich von jedem Punkt g der Oberfläche des Kristalls eine Linie nach diesem Fusspunkt c gezogen denken welche einen Winkel α mit de macht. (Es ist diess derselbe Winkel den wir auch bisher mit α bezeichneten.) Die Länge der Linie cg ist der Tangente des Winkels i proportional, welchen eine von g nach dem Auge gezogne Linie mit dem Perpendikel macht, welches vom Auge auf den Kristall gefällt wird. Wenn der Winkel i nicht zu gross ist, so kann man auch ohne bedeutenden Fehler cg dem Sinus des Winkels i proportional setzen.

Setzt man nun den Werth von ϑ in 14) gleich einer konstanten C so enthält die Gleichung nur noch zwei veränderliche i und α, und wir können sie als die Polargleichung einer Kurve betrachten deren radius vector sin. i einen Winkel α mit der Axe der Polarkoordinaten de macht. Es lässt sich nun behaupten, dass alle Stralen welche von solchen Punkten der Oberfläche des Kristalls, die in einer solchen Kurve liegen, gleiche Intensität haben; denn da für alle diese Punkte $\vartheta = C$ ist, so muss auch der allen diesen Punkten entsprechende Werth von S in 15) konstant sein, da ϑ die einzige veränderliche Grösse in diesem Werthe ist. Um die Form der isochromatischen Kurven zu bestimmen, haben wir also jetzt nur die Gleichung

$$T\left\{\frac{A-B}{AB}-\frac{3}{2}\frac{\sin.i^2}{B}(A-B)\,[B-(A+B)\sin.\alpha^2]\right\}=C \quad \ldots\ 16)$$

zu diskutiren. Diese Gleichung lässt sich verwandlen in

$$\sin.i^2=\frac{C-\frac{T(A-B)}{AB}}{\frac{T}{B}\frac{2}{3}(B-A)\,[B-(A+B)\sin.\alpha^2]} \quad \ldots\ldots\ 17)$$

oder

$$\sin.i^2=\frac{M}{(A+B)\sin.\alpha^2-B} \quad \ldots\ldots\ 18)$$

Digitized by Google

wenn wir $\frac{2}{3}\frac{ABC-T(A-B)}{T(A-B)}=M$ setzen. Die Gleichung 18) ist nun offenbar die Polargleichung einer Hyperbel deren Axen sind

$$\sqrt{\left\{\frac{2}{3}\frac{ABC-T(A-B)}{ABT(A-B)}\right\}}\sqrt{A}$$

und

$$\sqrt{\left\{\frac{2}{3}\frac{ABD-T(A-B)}{ABT(A-B)}\right\}}\sqrt{B}$$

woraus denn folgt, dass der Sinus des Asymptotenwinkels der Hyperbel

$$\frac{2\sqrt{B}}{\sqrt{A+B}} \quad \ldots\ldots\ldots 19)$$

oder, dass der Sinus des Winkels, welchen die Asymptoten mit der Axe der Polarkoordinaten machen, ist

$$\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A+B}} \quad \ldots\ldots\ldots 20)$$

Es seien Fig. 4 no und lm diese Asymptoten. Aus dem Werthe des Sinus des Winkels dcn bei 20) folgt, dass dieser Winkel bei positiven Kristallen, für welche $B>A$, grösser, für negative hingegen, für welche $B<A$, kleiner als 45° ist, so dass also Winkel der Asymptoten lcn für positive Kristalle grösser, für negative Kristalle kleiner als 90° ist.

Der Winkel lcn ist nicht viel von einem rechten verschieden, da A und B nicht sehr von einander verschieden sind, und offenbar wird dieser Winkel sich um so mehr einem rechten nähern je schwächer die doppelte Brechung des Kristalls ist, den man betrachtet. Für Kalkspath ist A ohngefähr 0,67, B aber 0,6; für Kalkspath ist demnach

$$\text{sin. dcn}=\frac{\sqrt{0,6}}{\sqrt{0,67+0,6}}=\frac{\sqrt{0,6}}{\sqrt{1,27}}$$

woraus sich für den Winkel lcn ohngefähr 86° ergibt.

Digitized by Google

Für Bergkristall ist A=0,645 B=0,649, es ist demnach hier der Winkel l c n ohngefähr 90° 4′.

Die Gleichung 18) gibt so lange M positiv ist nur dann reelle Werthe für sin. i, wenn sin. $\alpha > \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B+A}}$ ist, in diesem Fall aber ist sie die Gleichung einer Hyperbel welche in dem Asymptoten Winkel n c m und seinem Vertikalwinkel liegt. Wenn M negative Werthe erhält, so ist 18) die Gleichung einer Hyperbel welche zwischen dem Asymptoten Winkel l c n liegt, die hellen und dunklen Ringe welche man sieht werden also ohngefähr die in Fig. 4 verzeichnete Gestalt haben.

Wenn M positiv sein soll so muss bei positiven Kristallen

$$C > \frac{T(A-B)}{AB}$$

wenn aber M negativ sein soll muss

$$C < \frac{T(A-B)}{AB}$$

sein, d. h. in Worten ausgedrückt die Anzahl ϑ der Wellenlängen um welche die Stralen deren Interferenz die im Winkel n c m gelegnen Hyperbeln bildet ist grösser, die Anzahl der Wellenlängen aber um welche die, die andern Hyperbeln bildenden Stralen gegen einander zurückbleiben ist kleiner, als die Anzahl der Wellenlängen um welche der ordinäre und extraordinäre perpendikulär durch den Kristall gehende Stral gegeneinander zurückbleiben, denn für i=o wird ja $\vartheta = \frac{T(A-B)}{AB}$.

Wir haben oben gesehn, dass für negative Kristalle ϑ das Zeichen wechselt, mithin müssen wir in dem Ausdruck für M so wie sonst überall C mit entgegengesetztem Zeichen einführen, soll nun M einen positiven Werth haben, so muss der absolute Werth von $C < \frac{T(A-B)}{AB}$,

Digitized by Google

soll hingegen M negativ sein, so muss auch $C > \frac{T(B-A}{AB}$ sein. Es folgt daraus dass das Zurückbleiben der Stralen gegeneinander, welche innerhalb des Winkels n c m austreten weniger, das Zurückbleiber derjenigen aber, welche innerhalb des Winkels l c n austreten mehr beträgt, als das gegenseitige Zurückbleiben der mitten durch den Kristall durchgehenden Stralen.

Die Formel 3) bezieht sich wie dort schon bemerkt wurde nur auf den Fall dass die Schwingungsebne des zweiten Turmalins innerhalb desjenigen durch die Schwingungsebnen des ordinären und extraordinären Strals gebildeten Quadranten g c e Fig. 1 liegt, welcher die Schwingungsebne des ersten Turmalins einschliesst. Alles was wir bisher betrachtet haben bezieht sich demnach auf den Fall dass die Schwingungsebnen der beiden Turmaline parallel sind. Um unsre Formeln auf den Fall anzuwenden dass sich die Turmaline kreuzen, haben wir nur ϑ mit $\vartheta + {}^1/_2$ zu vertauschen, wodurch in der Form der Ringe durchaus nichts geändert wird; nur werden alle diejenigen Stellen die vorher hell erschienen, dunkel sein, und umgekehrt. (Fresnel Mémoire sur la double refraction.)

Bisher haben wir bloss die Gestalt der Ringe betrachtet, wir wollen nun zur Untersuchung ihrer Grösse übergehn.

Setzen wir in dem Ausdruck für ϑ bei 14) $i = o$ so reduzirt sich ϑ auf $\frac{T(A-B)}{AB}$, und dieser Werth in die Gleichung 15) gesetzt gibt uns die Intensität des Strals welche von dem Mittelpunkt der Figur in unser Auge trifft. Geben wir nun α einen bestimmten Werth, z. B. setzen wir es $= o$ und lasse i wachsen, so ändert sich zugleich der Werth von S, und gibt uns nach und nach die Intensitäten aller Stralen welche von den auf der Linie d c aufeinanderfolgenden Punkten herkommen. (Wenn α einen andern Werth hat so ist dadurch eine andre Linie

Digitized by Google

bestimmt. Lassen wir nun so i von 0 an wachsen, so wird S grösser oder kleiner bis wir zu einem Werthe $S = J^2$ oder $S = o$ kommen. Solche Hyperbolische Kurven nun für welche $S = J^2$ oder $S = o$ ist können wir als die Mitte der hellen und dunklen Kurven überhaupt betrachten, und die Entfernung der Durchschnittspunkte zweier ganz dunklen oder ganz hellen Kurven mit der Linie c d als Breite der Ringe in dieser Richtung betrachten.

Es sei i, der Winkel den ein von der Linie d c ins Auge kommender Stral, welcher ganz dunkel sein soll, mit dem vom Auge auf den Punkt c gefällten Perpendikel macht; lässt man nun sin. i, wachsen um

$$\sqrt{\frac{2}{3T(A-B)}} + \sin.i^2, \quad -\sin.i, \quad \ldots \ldots 21)$$

so wächst dadurch ϑ um 1, und der Werth von S wird wieder derselbe sein der es für i, war nämlich o. 21) gibt uns demnach ein Mass für die Breite der Ringe. Die Breite der Ringe nimmt wie aus 21) folgt um so mehr ab je weiter sie vom Mittelpunkte entfernt sind.

Wenn i nicht sehr gross ist, so ist der Ausdruck nicht sehr von $\sqrt{\frac{2}{T(A-B)^2}}$ verschieden, woraus hervorgeht dass die Breite der Ringe sehr nahe umgekehrt wie die Wurzeln aus den Dicken der Platten verhalten.

Der Ausdruck

$$\sqrt{\frac{2}{3T(A-B)}} \quad \ldots \ldots \ldots 22)$$

kann überhaupt die Breite des Innersten Rings ohne bedeutenden Fehler darstellen. Will man diesen Ausdruck in Zahlen übersetzen, so muss man alle Grössen auf einerlei Einheit reduziren. Die Einheit in welchen A und B ausgedrückt ist, ist offenbar die Länge einer Lichtwelle in der Luft, und in dieser Einheit muss auch T ausgedrückt werden. Auf den

Digitized by Google

Zoll gehn aber ohngefähr 45000 Wellenlängen der mittleren Stralen des Spektrums, ist also T in Zollen ausgedrückt, so hat man ihre Anzahl mit 45000 zu multipliziren und in 22) zu setzen, alsdann gibt uns 22) den Sinus des Gesichtswinkels unter welchen uns der erste Ring erscheinen muss.

Haben wir zum Beispiel eine Kalkspathplatte von 1″ Dicke so wird der Sinus des Gesichtswinkels t unter welchem der innerste Ring erscheint sein

$$\sin. t = \sqrt{\frac{2}{3 \times 4500 \times 0{,}07}} = \sqrt{\frac{2}{21 \,.\, 45}}$$

und also ohngefähr

$$t = 2^{\circ}\ 40'$$

Für eine 1 Zoll dicke Bergkristallplatte haben wir

$$\sin. t = \sqrt{\frac{2}{3 \times 45000 \times 0{,}004}} = \sqrt{\frac{2}{12 \,.\, 45}}$$

woraus ohngefähr folgt

$$t = 3^{\circ}\ 30'$$

wie es sich auch bei Anstelluug der Versuche bestätigt findet.

Einiges übgr die zur Bestätigung des bisher gesagten anzustellenden Versuche.

Wir haben bisher die Länge einer Lichtwelle in der Luft als eine beständige Grösse betrachtet, und sie sogar als Längeneinheit angenommen. Für verschiedenfarbige Stralen aber ist bekanntlich die Wellenlänge in einem und demselben Mittel verschieden; alles was bisher gesagt worden ist bezieht sich demnach nur auf homogenes Licht. Die obigen Formeln zeigen, dass die Breite der Ringe für eine und dieselbe Kristallplatte bei verschiednen Farben verschieden ist; lässt man daher in unserm Falle weisses Licht einfallen, so fallen die Ringe der

Digitized by Google

verschiednen Farben, wenn der Kristall nur einigermassen dick ist, so übereinander, dass aus ihrer Vermischuug ein etwas unreines weiss hervorgeht. (Herschel, über das Licht.) Sind die Blättchen dünn genug, so erscheinen sie bekanntlich lebhaft gefärbt; vermittelst des Ausdrucks 22) kann man sich aber leicht überzeugen dass alsdann die Breite der Ringe viel zu gross ist, als dass man nur einigermassen die Form derselben erkennen könnte, da das Gesichtsfeld nur einen zu kleinen Theil der Figur umfasst. Um die Kurven wirklich zu übersehu, bleibt also nichts übrig als dickere Kristallplatten und homogenes Licht anzuwenden.

Das reinste homogene Licht kann man sich auf jeden Fall durch ein Prisma verschaffen, jedoch auch die Flamme des Weingeistes gibt ein sehr homogenes gelb, namentlich wenn man etwas Kochsalz zusetzt, und desshalb eignet sich die Weingeistflamme sehr für unsre Versuche, die man aber im dunklen anstellen muss, weil das Licht der Spiritusflamme nur eine sehr geringe Intensität hat, die man durch künstliche Mittel, wie z. B. grosse Hohlspiegel möglichst zu verstärken suchen muss.

Um die hellen und dunklen Kurven in den Dimensionen zu sehn wie sie aus den obigen Formeln folgen braucht man nur den Kristall in die gehörige Lage zwischen zwei Turmalinplatten zu bringen und nach einem homogenen Lichte zu sehn. Am besten eignen sich für diese Versuche solche einaxige Kristalle welche in sechsseitigen Säulen kristallisirt sind, wie Bergkristall und zuweilen auch Kalkspath, weil die natürlichen Oberflächen schon parallel mit der Axe sind. Sehr schön übersieht man mehrere Ringe zugleich in einem solchen Stück Kalkspath von 2—3 Linien Dicke; Bergkristall muss schon eine ziemlich bedeutende Dicke haben wenn man mehrere Kurven zugleich übersehn will.

Wenn man die Kristalle erst schneiden und schleifen muss, so ist es durchaus nöthig, namentlich bei stärker doppelt brechenden Kristallen die Oberflächen so genau als möglich parallel zu machen, weil sonst die ordinären und extraordinären Stralen nicht mehr parallel austreten würden, und alsdann durchaus keine Interferenz mehr stattfinden kann.

In der schon oben angeführten Airy'schen Abhandlung ist ein Apparat beschrieben vermittelst dessen man in Kristallen in welchen die Ringe zu gross sind um ganz übersehn zu werden, in einer sehr zusammengezognen Gestalt erscheinen; dieser Apparat ist für diese Versuche sehr vortheilhaft anzuwenden, nur muss man homogenes Licht auf den Polarisationsspiegel des Apparates fallen lassen.

Digitized by Google

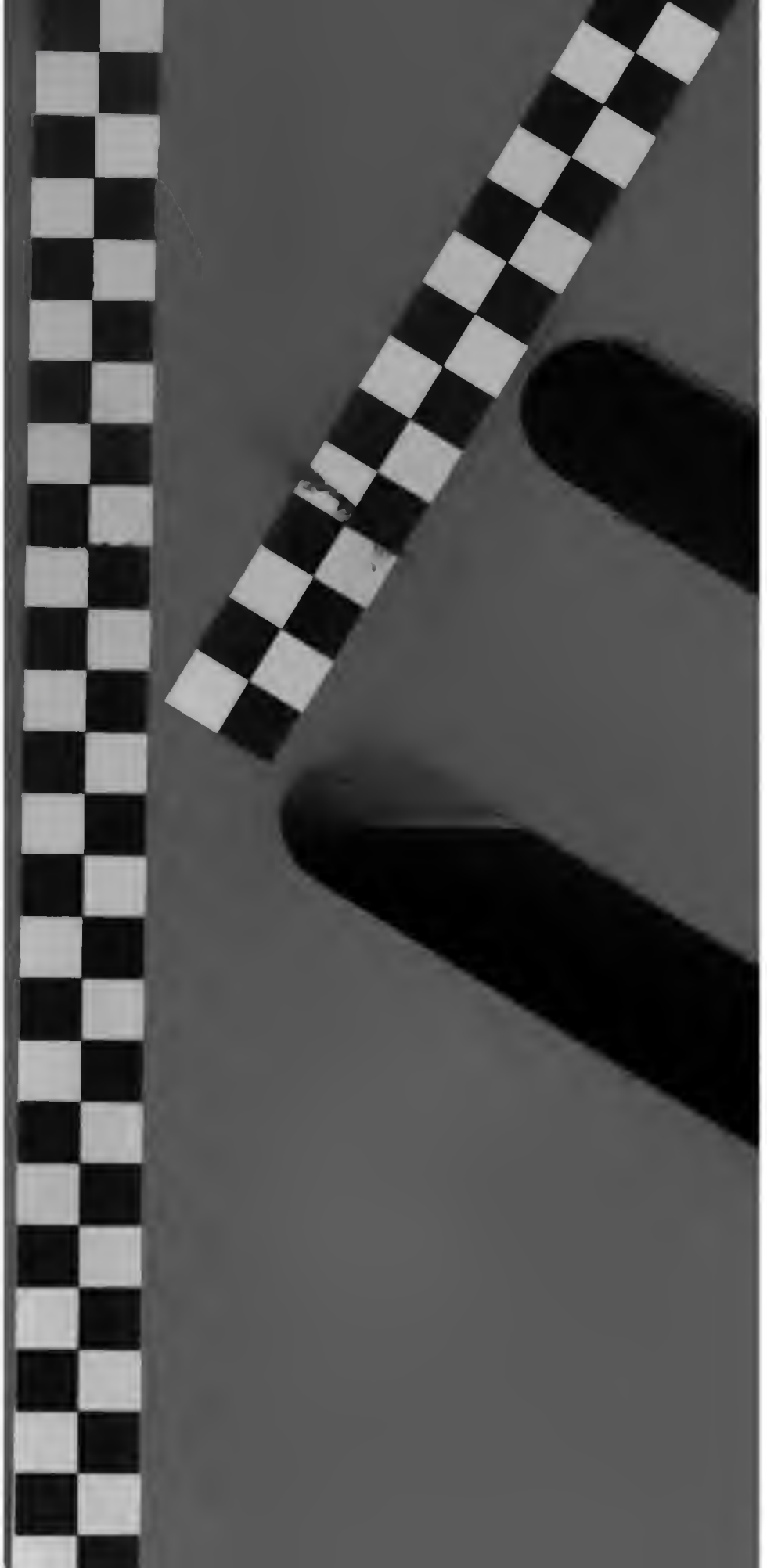
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google